

© Е.М. СОРОКИНА<sup>1</sup>, А.Г. ОБУХОВ<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Тюменское высшее военно-инженерное командное училище

<sup>2</sup> Тюменский государственный нефтегазовый университет  
cetaiia@mail.ru, aobukhov@tsogu.ru

УДК 519.63+533.6

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ  
КОНВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПРИ КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ СХЕМЕ  
НАГРЕВА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ**

**NUMERICAL SIMULATION OF GAS CONVECTIVE FLOW  
THERMODYNAMIC PARAMETERS IN THE ANNULAR HEATING SCHEME  
UNDER NORMAL GRAVITY CONDITIONS**

*Рассматривается полная система уравнений Навье–Стокса, описывающая течения сжимаемого вязкого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести. Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными. За начальные условия принимаются функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье–Стокса. В качестве краевых условий предлагаются условия непротекания и теплоизоляции.*

*Конвективный поток газа инициируется кольцеобразным нагревом подстилающей поверхности. Решения полной системы уравнений Навье–Стокса строятся численно по явной разностной схеме в кубе с единичной длиной ребра. Приведены результаты расчетов плотности, температуры и давления конвективного потока вязкого сжимаемого теплопроводного газа в условиях действия силы тяжести. Показано, что термодинамические параметры имеют сложную структуру и существенным образом зависят от формы нагрева, высоты и времени нагрева. Нестационарность конвективного потока газа более отчетливо проявляется в начальной стадии его формирования.*

*We consider the complete system of Navier–Stokes equations describing the flow of a compressible viscous heat-conducting gas under the influence of gravity. The coefficients of viscosity and thermal conductivity are assumed to be constant. The initial conditions are set by the functions that are accurate analytical solution of the complete Navier–Stokes equations. For the purposes of this research impermeability and thermal insulation are accepted as boundary conditions. Convective gas flow is initiated by an annular heating of the underlying surface. Solutions of the full Navier–Stokes equations are constructed numerically by an explicit difference scheme in a cube with an edge length of the unit. The article contains the results of calculations for density, temperature and pressure of the convective flow of viscous compressible heat-conducting gas under the influence of gravity. It is shown that the thermodynamic parameters have a complicated structure and essentially depend on the shape of heating, altitude and time of heating. Unsteady convective gas flow is more pronounced in the initial stage of its formation.*

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА.** Система уравнений газовой динамики, полная система уравнений Навье–Стокса, краевые условия.

**KEY WORDS.** The system of gas dynamics equations, the complete system of Navier–Stokes equations, the boundary conditions.

При описании сложных течений газа используется модель упругой сплошной среды, основанная на решении полной системы уравнений Навье–Стокса [1]. Эта модель наиболее адекватно описывает физические процессы в указанных течениях, поскольку учитывает диссипативные свойства вязкости и теплопроводности.

Теоретические исследования, проведенные в последние годы [2-6], были посвящены изучению течения газа в разных частях восходящего закрученного потока. В этих работах кроме модели, основанной на решении системы уравнений газовой динамики, использовалась и модель полной системы уравнений Навье–Стокса. С работ [7-10] начался новый цикл исследований сложных течений газа, предполагающих математическое моделирование и численные расчеты трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в целом. Исследовались сложные течения газа в восходящих закрученных потоках, инициированных нагревом подстилающей поверхности и вертикальным продувом при учете действия сил тяжести и Кориолиса. Кроме того, сделана попытка в этой же модели без учета действия силы Кориолиса описать возникающее при нагреве подстилающей поверхности конвективное течение вязкого теплопроводного газа [11; 12], причем нагрев осуществлялся в центре нижней грани расчетной области в виде круга конечного радиуса.

**Целью** данной работы является численный расчет термодинамических характеристик в начальной стадии формирования трехмерного нестационарного конвективного течения газа, вызванного локальным кольцеобразным прогревом нижней поверхности расчетной области.

#### **Полная система уравнений Навье–Стокса**

Полная система уравнений Навье–Стокса, записанная в безразмерных переменных с учетом действия силы тяжести, в векторной форме имеет следующий вид [13]:

$$\begin{cases} \rho_t + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0, \\ \vec{V}_t + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \vec{g} + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \vec{V}) + \frac{3}{4} \Delta \vec{V} \right], \\ T_t + \vec{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \vec{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + \right. \\ \left. + (u_x - w_z)^2 + (v_y - w_z)^2] + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + w_x)^2 + (v_z + w_y)^2] \right\}, \end{cases} \quad (1)$$

где безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности имеют значения  $\mu_0 = 0.001$ ,  $\kappa_0 \approx 1.458333\mu_0$ .

Эта система в дифференциальной форме передает законы сохранения массы, импульса и энергии в движущейся сплошной среде. Система не содержит член, описывающий ускорение Кориолиса, поскольку в данной работе он полагается равным нулю.

В системе (1):  $t$  — время;  $x, y, z$  — декартовы координаты;  $\rho$  — плотность газа;  $\vec{V} = (u, v, w)$  — вектор скорости газа с проекциями на соответствующие декартовы оси;  $T$  — температура газа;  $\vec{g} = (0, 0, -g)$  — вектор ускорения силы тяжести;  $\gamma = 1.4$  — показатель политропы для воздуха;  $\nabla$  и  $\text{div}$  — операторы градиента и дивергенции по декартовым пространственным переменным.

### Начальные и граничные условия

Начальные условия при описании конвективных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа в случае постоянных значений коэффициентов вязкости и теплопроводности в данной работе берутся в виде функций, задающих известное точное аналитическое решение [14] системы (1):

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad (2)$$

$$T_0(z) = 1 - kz, \quad k = \frac{l x_{00}}{T_{00}}, \quad l = 0.0065 \frac{K}{M}, \quad x_{00} = 10 \text{ м}, \quad T_{00} = 288^\circ K, \quad (3)$$

$$\rho_0(z) = (1 - kz)^{\nu-1}, \quad \nu = \frac{\gamma g}{k} = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Расчетная область представляет собой куб с длинами сторон  $x^0 = 1$ ,  $y^0 = 1$  и  $z^0 = 1$  вдоль осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Для плотности на всех шести гранях куба  $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = 0$ ,  $z = z^0$  — исходя из неизменности потока за пределами расчетной области, ставится «условие симметрии» [15]. Это означает, что на границе предполагается равенство нулю производной функции плотности газа в направлении нормали к граничной поверхности.

Для температуры на пяти гранях куба  $x = 0$ ,  $x = x^0$ ,  $y = 0$ ,  $y = y^0$ ,  $z = z^0$  задаются условия теплоизоляции («условие симметрии») [15].

На нижней плоскости  $z = 0$  значения температуры в кольце между концентрическими окружностями с безразмерными значениями радиусов  $r = 0.1$  и  $r = 0.3$  заданы в виде функции:

$$T|_{z=0} = T_0(t, x, y) = 1 + M(1 - e^{-10t}) \cos^2 \left( 15.7 \sqrt{(x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2} \right), \quad (5)$$

моделирующей кольцеобразный локальный нагрев нижней грани расчетного куба. Множитель  $M$  в формуле (5) равен превышению максимального безразмерного значения температуры над масштабным единичным значением.

Краевые условия для компонент вектора скорости газа на всех шести гранях берутся соответствующими «условиям непротекания» для нормальной к граничной поверхности составляющей вектора скорости (равенство нулю нормальной составляющей к этой поверхности вектора скорости газа) и «условиям симметрии» для двух других компонент вектора скорости течения [15]. Данные краевые условия фактически означают рассмотрение конвективного течения вязкого сжимаемого теплопроводного газа в непроницаемой и теплоизолированной кубической емкости.

Расчетная область заполняется трехмерной сеткой узлов пересечения трех семейств плоскостей  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_k$ , где  $x_i = i \cdot \Delta x$ ,  $y_j = j \cdot \Delta y$ ,  $z_k = k \cdot \Delta z$ ,  $0 \leq i \leq L$ ,  $0 \leq j \leq M$ ,  $0 \leq k \leq N$ .  $\Delta x = x^0 / L$ ,  $\Delta y = y^0 / M$ ,  $\Delta z = z^0 / N$  — разностные шаги по трем пространственным переменным.

Зная в начальный момент времени  $t = 0$  во всех точках куба все искомые функции, с помощью явной разностной схемы вычисляются значения искомых функций во внутренних точках куба, во внутренних точках каждой из граней, ребер и вершин.

**Результаты расчетов.** Расчеты проводились при следующих входных параметрах: масштабные размерные значения плотности, скорости, расстояния и времени равны  $\rho_{00} = 1.2928 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $u_{00} = 333 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $x_{00} = 10 \text{ м}$ ,  $t_{00} = x_{00} / u_{00} = 0.03 \text{ с}$ .

Разностные шаги по трем пространственным переменным  $\Delta x = \Delta y = 0.01$ ,  $\Delta z = 0.1$ , а шаг по времени  $\Delta t = 0.001$ .

Безразмерное и соответствующее размерное значение коэффициента следующие:  $M = 0.125$ ,  $M^* = 36 \text{ }^\circ\text{C}$ .

На рис. 1-4 представлены результаты расчета плотности газа в виде графиков функции двух переменных  $\rho(x, y)$  на фиксированной высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для четырех расчетных шагов по времени. Поскольку изменения значений плотности в зависимости от времени происходят в весьма незначительных пределах, то на графиках эти изменения отображаются только цветом: синему цвету соответствуют меньшие, а красному цвету — большие значения плотности.

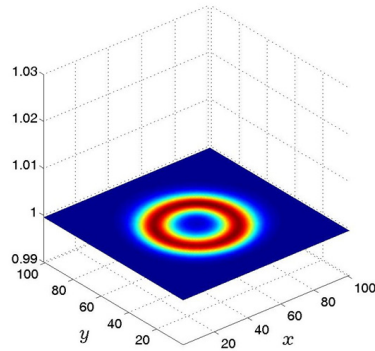


Рис. 1. Плотность на 50 шаге

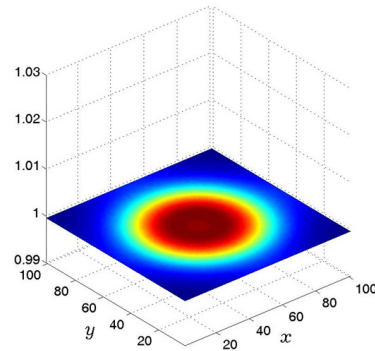


Рис. 2. Плотность на 300 шаге

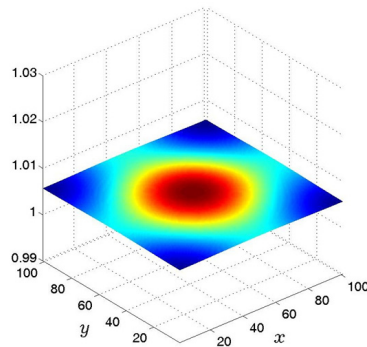


Рис. 3. Плотность на 3000 шаге

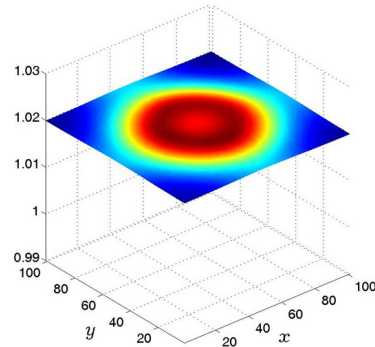


Рис. 4. Плотность на 10000 шаге

Из приведенных рисунков видно, что поведение плотности газа за рассчитанное время можно характеризовать следующим образом.

Периферийные значения плотности, близкие к боковым граням расчетной области, для каждого отдельного фиксированного момента времени меняются незначительно. В центральной части боковых граней значения плотности больше, а в углах — меньше. Это, по-видимому, связано с более интенсивным притоком газа к центрам боковых граней, чем к областям, близким к вертикальным ребрам.

Общее фоновое безразмерное значение плотности с течением времени увеличивается от 1 до 1.02, что соответствует изменению размерных значений в пределах от 1.2928 кг/м<sup>3</sup> до 1.3187 кг/м<sup>3</sup>.

Распределение плотности в начале нагрева имеет форму кольца, центр которого совпадает с геометрическим центром квадратного сечения расчетной области, а радиус его совпадает с радиусом кольца нагрева. С течением времени происходит расширение кольца с повышенными значениями плотности и его размывание в пространстве, и к 10000 расчетному шагу по времени область повышенных значений плотности практически достигает боковых граней расчетного куба.

С течением времени меняется и геометрическая симметрия плотности. В начале кольцеобразного прогрева нижней поверхности плотность газа имеет четко выраженную центральную симметрию, а с течением времени область центральной симметрии, расширяясь к боковым граням, меняется на прямоугольную.

На рис. 5-8 приведены результаты расчета температуры газа в виде графиков функции двух переменных  $T(x, y)$  на фиксированной высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для четырех таких же расчетных шагов по времени.

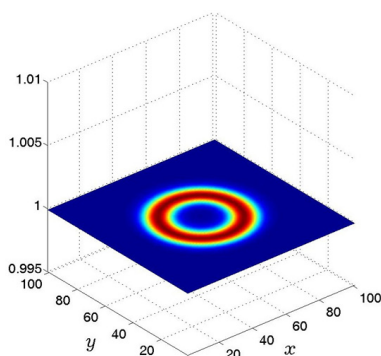


Рис. 5. Температура на 50 шаге

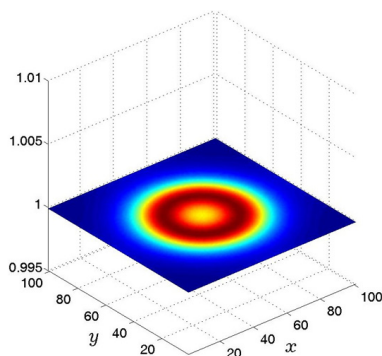


Рис. 6. Температура на 300 шаге

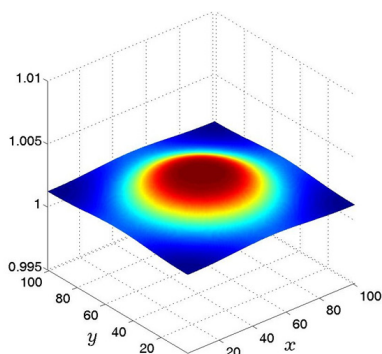


Рис. 7. Температура на 3000 шаге

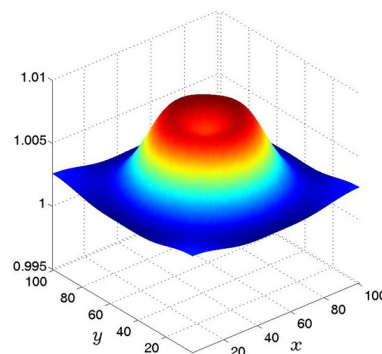


Рис. 8. Температура на 10000 шаге

Поведение рассчитанных значений температуры как функций координат и времени отлично от аналогичного поведения плотности. Периферийные значения температуры в начале прогрева также близки к единичному, а с течением времени наблюдаются немонотонные их изменения. Фоновые безразмерные значения температуры в областях, близких к боковым граням расчетного куба, с течением времени изменяются существенно меньше, чем значения плотности. В рассчитанном диапазоне временных шагов эти значения температуры меняются в пределах от 1 до 1.0025 (в размерных значениях от 288°K до 288.72°K).

Что касается геометрической симметрии, то с течением времени она для температуры практически не меняется со временем. В начале кольцеобразного прогрева нижней поверхности температура газа имеет четко выраженную кольцеобразную центральную симметрию, которая с течением времени, расширяясь к боковым граням, сохраняет кольцеобразный характер. Отличием поведения температуры от поведения плотности является существенно большее увеличение ее в центральной области до значений 1.01 (размерное значение 290.88°K). Как видно из рис. 8, это увеличение температуры имеет вид колокола, что связано с более интенсивным прогревом центральной области. Кольцеобразный нагрев подстилающей поверхности, очевидно, сказывается на поведении температуры нагрева на этой фиксированной высоте в центральной части исследуемой области и визуализируется в виде воронки в центре колоколообразной поверхности.

На рис. 9-12 приведены результаты расчета давления газа в виде графиков функции двух переменных  $p(x, y)$  на фиксированной высоте  $z = 0.5$  (размерное значение 5 м) для четырех расчетных шагов по времени. Поскольку давление есть произведение плотности на температуру, то его поведение как функции координат и времени во многом совпадает с аналогичным поведением плотности и температуры.

Общим в поведении давления в рассмотренном промежутке времени является рост фонового периферийного значения от 1 до 1.023 (размерные значения от 100 кПа до 102.3 кПа) и постепенный переход от кольцевой структуры к колоколообразной при сохранении осевой центральной симметрии. Превышение максимальных значений давления над фоновыми для 10000 расчетного шага по времени составляет 0.007 (размерное значение 700 Па).

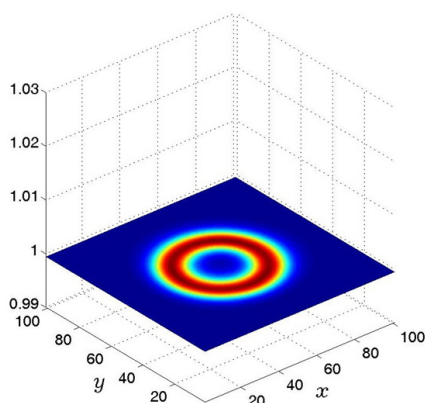


Рис. 9. Давление на 50 шаге

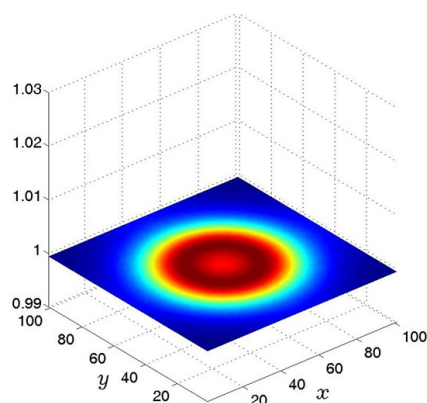


Рис. 10. Давление на 300 шаге

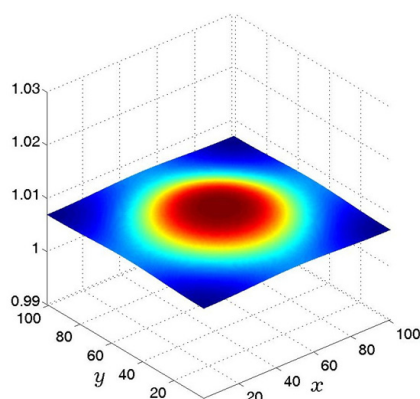


Рис. 11. Давление на 3000 шаге

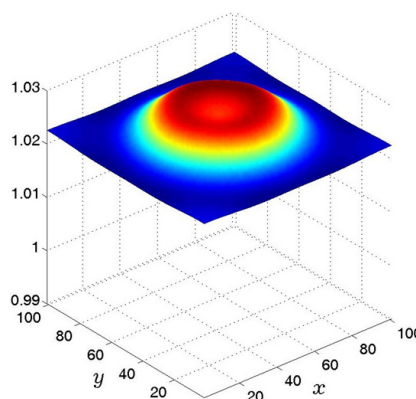


Рис. 12. Давление на 10000 шаге

**Выводы.** Для описания нестационарных трехмерных конвективных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в замкнутой кубической области в данной работе рассматривается численное решение полной системы уравнений Навье–Стокса. Коэффициенты вязкости и теплопроводности полагаются постоянными. За начальные условия принимаются функции, являющиеся точным аналитическим решением полной системы уравнений Навье–Стокса. В качестве краевых условий предлагаются условия непротекания и теплоизоляции.

Возникающий при кольцеобразном нагреве нижней грани расчетной области конвективный поток газа в условиях действия силы тяжести имеет ярко выраженный нестационарный характер, более отчетливо проявляющийся в начальной стадии его формирования.

Прежде всего это касается термодинамических характеристик — температуры, плотности и давления, некоторые результаты расчетов которых приведены в данной работе. Показано, что термодинамические параметры имеют сложную структуру и существенным образом зависят от формы нагрева, высоты и времени нагрева.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Представление решений системы уравнений Навье–Стокса в окрестности контактной характеристики // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51, вып. 4. С. 574-584.
2. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
3. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование и численный расчет течений в придонной части тропического циклона // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика». 2012. № 4. С. 175-183.
4. Обухов А.Г. Математическое моделирование и численные расчеты течений в придонной части торнадо // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика». 2012. № 4. С. 183-189.
5. Баутин С.П., Обухов А.Г. Математическое моделирование придонной части восходящего закрученного потока // Теплофизика высоких температур. 2013. Т. 51, № 4. С. 567-570.
6. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2013. 215 с.

7. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет скоростных характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. 2014. № 3. С. 88-94.

8. Обухов А.Г., Абдубакова Л.В. Численный расчет термодинамических характеристик трехмерного восходящего закрученного потока газа // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика». 2014. № 7. С. 157-165.

9. Абдубакова Л.В., Обухов А.Г. Численный расчет термодинамических параметров закрученного потока газа, инициированного холодным вертикальным продувом // Известия вузов. Нефть и газ. 2014. № 5. С. 57-62.

10. Обухов А.Г., Баранникова Д.Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // Известия вузов. Нефть и газ. 2014. № 6. С. 65-70.

11. Обухов А.Г., Сорокина Е.М. Математическое моделирование и численный расчет трехмерного конвективного течения газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 6. С. 57-63.

12. Сорокина Е.М., Обухов А.Г. Численное исследование температурной зависимости скоростных характеристик нестационарного конвективного течения газа // Вестник Тюменского государственного университета. Серия «Физико-математические науки. Информатика». 2014. № 7. С. 147-156.

13. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

14. Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 4. С. 81-86.

15. Баутин С.П., Обухов А.Г. Об одном виде краевых условий при расчете трехмерных нестационарных течений сжимаемого вязкого теплопроводного газа // Известия вузов. Нефть и газ. 2013. № 5. С. 55-63.

#### REFERENCES

1. Bautin, S.P. Navier-Stokes equations solutions to in the neighborhood of the contact data // Applied Mathematics and Mechanics. 1987. Vol. 51. Issue 4. Pp. 574-584. (in Russian).

2. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices. Novosibirsk: Nauka, 2012. 152 p. (in Russian).

3. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical simulation of flows in the bottom part of tropical cyclones // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Sciences. Computer Science. 2012. № 4. Pp. 175-183. (in Russian).

4. Obukhov, A.G. Mathematical modeling and numerical calculations of the currents in the tornado lower part // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Sciences. Computer Science. 2012. № 4. Pp. 183-189. (in Russian).

5. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of the bottom part of the rising swirling flow // High Temperature. 2013. Vol. 51. № 4. Pp. 567-570. (in Russian).

6. Bautin, S.P., Krutova, I.Y., Obukhov, A.G., Bautin, K.V. Destructive atmospheric vortices: Theorem, calculations, experiments. Novosibirsk: Nauka; Ekaterinburg: USURT, 2013. 215 p. (in Russian).

7. Abdubakova, L.V., Obukhov, A.G. Numerical calculation of three-dimensional velocity characteristics of the rising and swirling flow of gas // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2014. № 3. Pp. 88-94. (in Russian).

8. Obukhov, A.G., Abdubakova, L.V. The numerical calculation of the thermodynamic characteristics of the three-dimensional swirling and rising flow of gas // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Sciences. Informatics. 2014. № 7. Pp. 157-165. (in Russian).



9. Abdubakova, L.V., Obukhov, A.G. The numerical calculation of the thermodynamic parameters of swirling gas flow initiated by blowing cold vertical // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2014. № 5. Pp. 57-62. (in Russian).

10. Obukhov, A.G., Barannikova, D.D. Features of the gas flow at the initial stage of the rising and swirling heat flow // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2014. № 6. Pp. 65-70. (in Russian).

11. Obukhov, A.G., Sorokina, E.M. Mathematical modeling and numerical simulation of three-dimensional convective flow of gas // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2013. № 6. Pp. 57-63. (in Russian).

12. Sorokina, E.M., Obukhov, A.G. Numerical study of the temperature dependence of the speed characteristics of unsteady convective gas flow // Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Sciences. Informatics. 2014. № 7. Pp. 147-156. (in Russian).

13. Bautin, S.P. Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).

14. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. One exact stationary solution of the equations of gas dynamics // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2013. № 4. Pp. 81-86. (in Russian).

15. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. A form of the boundary conditions in the calculation of three-dimensional unsteady compressible viscous heat-conducting gas // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2013. № 5. Pp. 55-63. (in Russian).

#### **Авторы публикации**

**Сорокина Елена Михайловна** — старший преподаватель кафедры естественно-научных дисциплин Тюменского высшего военно-инженерного командного училища

**Обухов Александр Геннадьевич** — профессор Тюменского государственного нефтегазового университета, доктор физико-математических наук

#### **Authors of the publication**

**Elena M. Sorokina** — Senior Lecturer, Tyumen Higher Military Command School of Engineering

**Alexander G. Obukhov** — Dr. Phys. and Math. Sci., Professor, Tyumen State Oil and Gas University